

---

## К вопросу о расчете конструкции призматической балки с многостоечным шпренгелем

*А.А. Журавлев, Д.А. Журавлев, Д.А. Корнет*

*Донской государственной технической университет, г. Ростов-на-Дону*

**Аннотация:** На основании начала наименьшей работы получены теоретические зависимости для определения внутренних усилий в элементах комбинированной системы шпренгельного типа. Проведен анализ результатов расчета шпренгельной балки с четырьмя стойками и выявлена физическая сторона явления изгиба при взаимодействии основной конструкции шпренгельной балки с элементами многостоечного шпренгеля.

**Ключевые слова:** шпренгельная балка, комбинированная система, многостоечный шпренгель, относительный эксцентриситет, потенциальная энергия.

Первые исследования шпренгельных балок проводились профессором R. Wiegmann в 1839 г. в Королевской Академии искусств в Дюссельдорфе [1]. Конструктивная система предварительно напряженных балок шпренгельного типа, использование которых наблюдается в течение последних ста восьмидесяти лет, успешно применяется в строительном деле и в настоящее время. Наибольшее распространение эта конструктивная система получила в покрытиях зданий и сооружений сельскохозяйственного назначения, чему в значительной мере способствовали разработки P. Suhling, проведенные в Германии [2,3]. Шпренгельные балки и несущие конструкции на их основе также хорошо зарекомендовали себя в большепролетных покрытиях и относятся к категории наиболее рациональных систем при усилении эксплуатируемых балочных конструкций.

Проблемам конструирования и расчета комбинированных систем шпренгельного типа посвящены исследования отечественных ученых, среди которых в первую очередь следует выделить работы научной школы проф. М.П. Забродина [4,5]. Из источников зарубежной литературы определенный интерес представляет работа W. Mönck [6], в которой приводится сводка формул для расчета простейших одно- и двухстоечных шпренгельных балок.

Причиной, вынуждающей возвращаться к расчету таких конструкций, является то, что в строительстве комбинированные системы шпренгельного типа пользуются популярностью, главным образом, благодаря их удачному применению в покрытиях общественных зданий и спортивных сооружений [7].

Наряду с широко распространенным решением, когда шпренгельные балки работают как плоскостные конструкции (рис. 1), особое место занимают пространственные системы регулярной структуры в виде перекрестных шпренгельных балок [8].

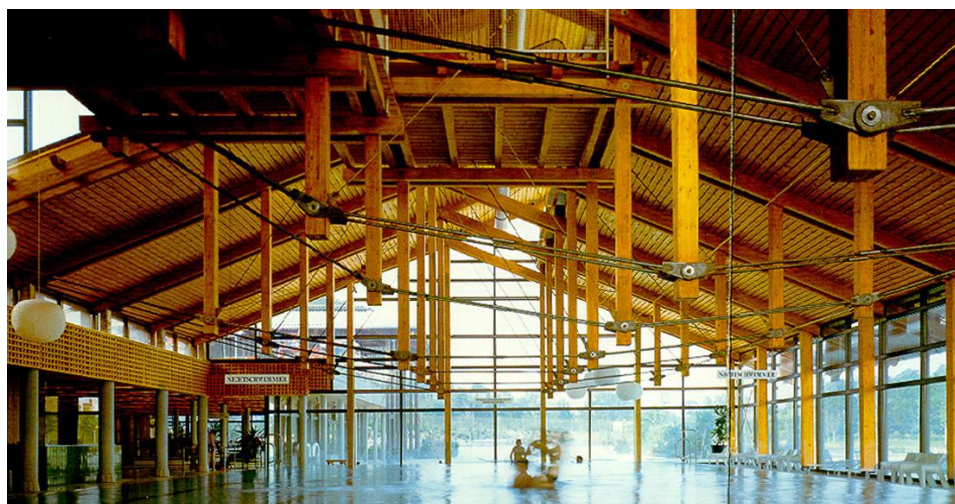


Рис. 1. Балки шпренгельного типа в покрытии плавательного бассейна спортивного центра Vadria в Вассербург-на-Инне (авторская фотография)

На прилагаемой фотографии (рис. 2) изображены шпренгельные балки, образующие перекрестную систему с ортогональными ячейками, которые размещаются в зоне бассейна размером 18 x 27 м в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Сечение призматических дощатоклееных балок принято одинаковым и равным 2 x 10 x 30 см; сечение стоек 16 x 16 см. Тяги выполнены в виде двухветвевых стальных элементов диаметром  $d = 3,6$  см.

Главная отличительная особенность данного конструктивного решения заключается в применении перекрестной системы шпренгельных балок ортогональной структуры с многостоечными шпренгелями. Шпренгельные балки, укладываемые в поперечном направлении, имеют пять стоек, а число стоек шпренгельных балок продольного направления равно восьми.

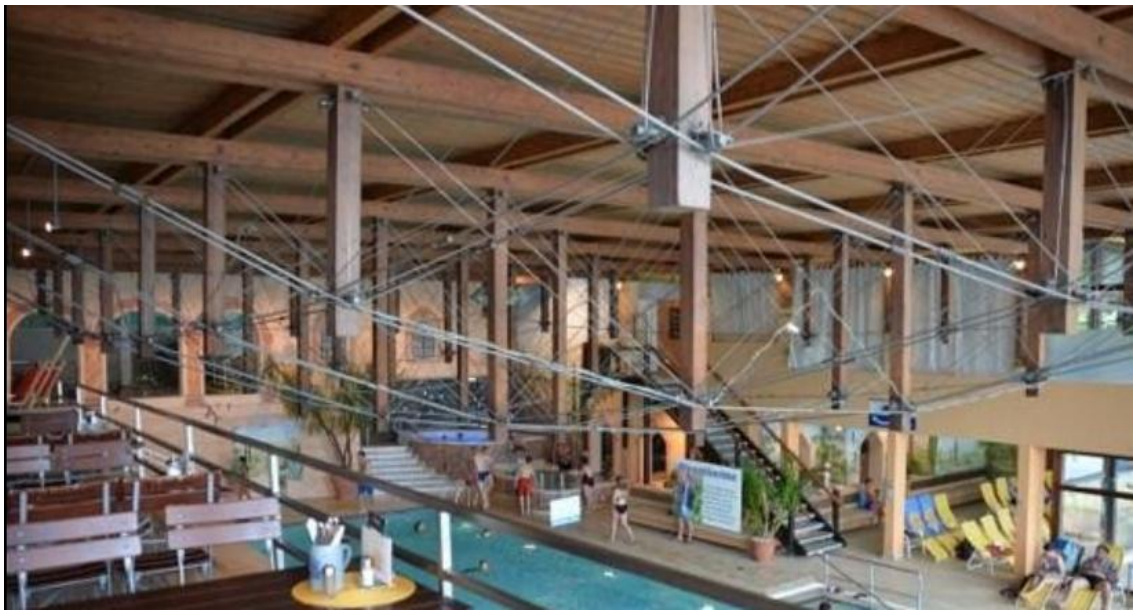


Рис. 2. Система перекрестных шпренгельных балок в покрытии здания многофункционального назначения в Кохеле-на-Зее (авторская фотография)

К сожалению, при ознакомлении с опытом возведения описанных двух спортивных сооружений совершенно не раскрываются особенности конструирования и расчета плоскостных и пространственных систем с применением комбинированных конструкций шпренгельного типа, а приведенные интересные иллюстрации носят лишь рекламный характер.

Отсутствие такого материала и побудило авторов статьи детально рассмотреть задачу статического расчета шпренгельной балки с многостоечным шпренгелем, уделив при этом основное внимание как выбору

величины относительного эксцентриситета, так и оценке влияния этого параметра на величину усилий в стойках шпренгельной системы.

Шпренгельными балками принято называть плоскостные системы, состоящие из способных самостоятельно работать под нагрузкой конструкций, которые дополнительно снабжаются устройствами, предназначенными для уменьшения изгибающих моментов в основных элементах.

По установившейся терминологии шпренгель происходит от немецкого слова *sprengen* – распирать и означает конструктивный элемент в виде незамкнутой стержневой системы треугольной или полигональной формы, присоединяемый к основной конструкции с целью повышения ее несущей способности. Шпренгельные балки относятся к числу статически неопределимых систем. При пролетах  $l > 12$  м основная часть конструкции шпренгельной балки выполняется преимущественно из клееной древесины, а тяги изготавливаются, как правило, из круглой стали.

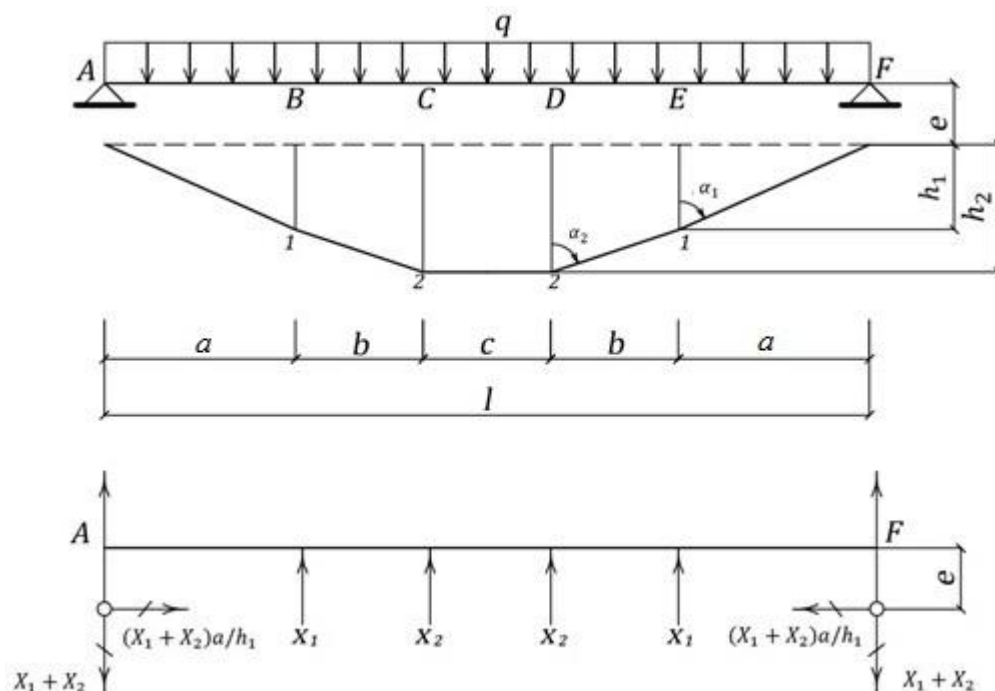


Рис. 3. Расчетная схема шпренгельной балки с четырьмя стойками

При анализе несущей способности плоскостной комбинированной системы шпренгельного типа, состоящей из основной конструкции в виде призматической дощатоклееной балки и двух пар разновысоких стоек шпренгеля (рис. 3), произведем ее расчет в случае, когда на основную конструкцию действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ .

Для определения усилий в стойках  $X_1$  и  $X_2$  воспользуемся началом наименьшей работы [9]. Потенциальную энергию всей системы запишем в виде суммы энергии, накапливаемой в основной конструкции дощатоклееной балки, в стойках шпренгельной системы и тягах:

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + V_3.$$

Здесь под  $V_0$  понимается потенциальная энергия изгиба основного элемента шпренгельной балки, выражение для которой запишется так:

$$\begin{aligned} V_0 = & \frac{1}{2E_0I_0} \left\{ 2 \int_0^a \left[ M_0 - (X_1 + X_2) \left( x + a \frac{e}{h_1} \right) \right]^2 dx + \right. \\ & + 2 \int_0^b \left[ M_0 - (X_1 + X_2)a \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right) - X_2x \right]^2 dx + \\ & \left. + \int_0^c \left[ M_0 - (X_1 + X_2)a \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right) - X_2b \right]^2 dx \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для энергии деформации сжатия основного элемента имеем:

$$V_1 = \frac{1}{2E_0F_0} \int_0^l \left[ (X_1 + X_2) \frac{a}{h_1} \right]^2 dx. \quad (2)$$

Потенциальная энергия, накапливаемая в каждой из пар стоек, определяется следующим образом:

$$V_2 = \frac{1}{2E_1F_1} \left[ 2 \left( \int_0^{h_1} X_1^2 dx + \int_0^{h_2} X_2^2 dx \right) \right]. \quad (3)$$

Что касается тяг, то для четырех наклонных элементов и одного горизонтального элемента в средней части шпренгельной балки выражение потенциальной энергии растяжения принимает вид:

$$V_3 = \frac{1}{2E_2F_2} \left\{ 2 \int_0^{\frac{a}{\sin \alpha_1}} \left[ (X_1 + X_2) \frac{1}{\cos \alpha_1} \right]^2 dx + 2 \int_0^{\frac{b}{\sin \alpha_2}} \left[ (X_1 + X_2) \frac{a}{h_1} \frac{1}{\sin \alpha_2} \right]^2 dx \right\} + \int_0^c \left[ (X_1 + X_2) \frac{a}{h_1} \right]^2 dx. \quad (4)$$

В результате дифференцирования выражения для потенциальной энергии комбинированной системы по искомым неизвестным  $X_1$  и  $X_2$ , получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} a^3 \left\{ \left[ \mu + \frac{3I_0 h_1}{F_1 a^3} + \frac{3e}{h_1} \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right) + \frac{9b}{2a} \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right)^2 \right] X_1 + \right. \\ & \left. + \left[ \mu + \frac{3b^2}{a^2} \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right) + \frac{3e}{h_1} \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right) + \frac{9b}{2a} \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right)^2 \right] X_2 \right\} = \\ & = 2 \int_0^a M_0 \left( x + \frac{ae}{h_1} \right) dx + 2a \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right) \int_a^{a+b} M_0 dx + a \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right) \int_{a+b}^{l-(a+b)} M_0 dx, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} a^3 \left\{ \left[ \mu + \frac{3e}{h_1} \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right) + \frac{9b}{2a} \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right)^2 + \frac{3b^2}{a^2} \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right) \right] X_1 + \right. \\ & \left. + \left[ \mu + \frac{3I_0 h_2}{F_1 a^3} + \frac{3e}{h_1} \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right) + \frac{9b}{2a} \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right)^2 + 6 \frac{b^2}{a^2} \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right) + \frac{5b^3}{2a^3} \right] X_2 \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^a M_o \left( x + \frac{ae}{h_1} \right) dx + 2 \int_a^{a+b} M_o \left( x + \frac{ae}{h_1} \right) dx + \\ &\quad + \left[ a \left( 1 + \frac{e}{h_1} \right) + b \right] \int_{a+b}^{l-(a+b)} M_o dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\mu$  означает:

$$\mu = 1 + \frac{3 I_o l}{2 F_o a h_1^2} + \frac{3 E_o I_o}{E_2 F_2 a^2 \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1} + \frac{3 E_o I_o b}{2 E_2 F_2 a h_1^2} \left( 1 + \frac{2}{\sin^3 \alpha_2} \right). \quad (7)$$

Разберем подробно случай, когда  $a = b = c$  и  $l = 5a$ . Вводя обозначения  $\xi = e/h_1$ ;  $q^* = qa/8$  и выполняя процедуру интегрирования для каждого из трех слагаемых в правой части уравнений (5) и (6), запишем систему двух линейных уравнений для отыскания усилий  $X_1$  и  $X_2$  в виде:

$$\begin{aligned} &\left[ \mu + \frac{3I_o h_1}{F_1 a^3} + \frac{3}{2} (3 + 8\xi + 5\xi^2) \right] X_1 + \\ &+ \left[ \mu + \frac{15}{2} (1 + \xi)^2 \right] X_2 = (116 + 125\xi)q^*, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &\left[ \mu + \frac{15}{2} (1 + \xi)^2 \right] X_1 + \\ &+ \left[ \mu + \frac{3I_o h_2}{F_1 a^3} + \frac{1}{2} (26 + 36\xi + 15\xi^2) \right] X_2 = (186 + 125\xi)q^*. \end{aligned} \quad (9)$$

При  $\mu = 1$  и  $\xi = 0$ , получаем:

$$11X_1 + 17X_2 = 232q^*,$$

$$17X_1 + 28X_2 = 372q^*.$$

Отсюда находим  $X_1 = 1,132qa$  и  $X_2 = 0,9740qa$ . К таким же результатам придем в случае расчета неразрезной пятипролетной балки на жестких опорах, представленной на рис. 4.

Заметим, что в этом случае в уравнениях (8) и (9) слагаемыми  $\frac{3I_0h_1}{F_1a^3}$  и  $\frac{3I_0h_2}{F_1a^3}$  мы пренебрегаем в силу малости численных значений этих величин.

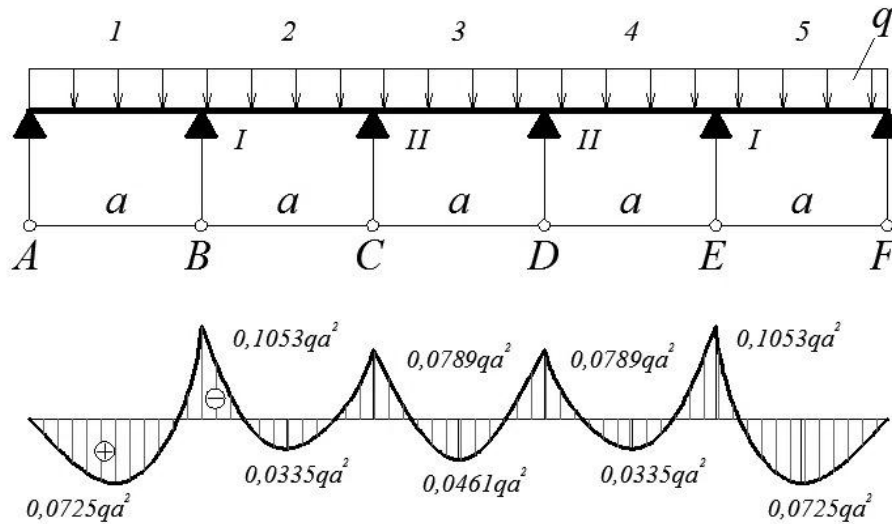


Рис. 4. Нерезренная пятипролетная балка

Факт выше упомянутого совпадения подтверждается численными значениями реакций в опорных сечениях балки, которые содержатся в следующей сводке формул [10]:

$$\begin{aligned}
 A = F &= 0,395 qa ; & M_1 &= 0,0779 qa^2 , \\
 B = E &= 1,132 qa ; & M_2 &= 0,0332 qa^2 , \\
 C = D &= 0,974 qa ; & M_3 &= 0,0461 qa^2 .
 \end{aligned}$$

$$M_I = -0,1053 qa^2 ,$$

$$M_{II} = -0,0789 qa^2 .$$

Для создания равномоментной схемы работы основного элемента шпренгельной балки всегда стремятся к тому, чтобы отрицательный момент на опорах был равен положительному моменту посередине пролета. Наибольший момент для концевых участков балки будет  $M_{max} = qa^2/16$ .



Из условия равновесия следует, что  $X_1 + X_2 = 2qa$ , и при этом должно быть  $N = (X_1 + X_2) \frac{a}{h_1} = \frac{2qa^2}{h_1}$ . Момент вследствие эксцентрично прикрепленного тяжа в опорном сечении  $M = 2qa^2 \frac{e}{h_1}$ . Таким образом, относительный эксцентриситет получается равным  $\xi = e/h_1 = 1/32$ .

Рассмотрим ситуацию, когда основной элемент конструкции шпренгельной балки характеризуется следующими данными:  $l = 18$  м;  $a = b = c = 3,6$  м;  $E_0 = 100000$  кгс/см<sup>2</sup>;  $I_0 = 45000$  см<sup>4</sup>;  $F_0 = 600$  см<sup>2</sup>.

Площадь поперечного сечения каждой из двух пар деревянных стоек высотой:  $h_1 = 2,0$  м и  $h_2 = 3,0$  м равна  $F_1 = 256$  см<sup>2</sup>.

Для стальных тяг принимаем:  $E_2 = 2060000$  кгс/см<sup>2</sup>;  $F_2 = 20,34$  см<sup>2</sup>, причем углы наклона тяг  $\alpha_1 = 61,0^\circ$  и  $\alpha_2 = 74,5^\circ$ .

Располагая этими значениями, определим по формуле (9) величину коэффициента  $\mu$ . Вычисления дают  $\mu = 1,039$ .

На основании полученных результатов решения системы уравнений (8) и (9) устанавливаем, что обе функции  $X_1(\xi)$  и  $X_2(\xi)$  изменяются фактически по линейному закону на всем интервале параметра  $\xi$  в пределах  $0 \leq \xi \leq 1/24$ .

Функция  $X_1(\xi)$  является убывающей, а  $X_2(\xi)$  постоянно возрастает, причем  $X_2 < X_1$ . При относительном эксцентриситете  $\xi = 1/32$  действительное значение суммарных усилий в каждой из двух пар стоек получается равным  $X_1 + X_2 = 1,987qa$ .

Если принять, что балка нагружена равномерной нагрузкой  $q = 2,0$  тнс/м, то будем иметь  $X_1 + X_2 = 1,987 \cdot 2 \cdot 3,6 = 14,31$  тнс.

Момент в концевых сечениях балки:

$$M_a = M_f = (X_1 + X_2) \frac{ae}{h_1} = -14,31 \cdot 3,6 \frac{1}{32} = -1,61 \text{ тнсм.}$$

Наибольший отрицательный изгибающий момент в точках С и D основной конструкции шпренгельной балки будет:

$$M_{II} = -0,0913 qa^2 = -2,37 \text{ тнсм.}$$

Для продольной силы сжатия вычисления дают:

$$N = (X_1 + X_2) \frac{a}{h_1} = 1,987 \cdot 2 \cdot 3,6 \frac{3,6}{2} = 25,75 \text{ тнс.}$$

Гибкость элемента основной конструкции шпренгельной балки в плоскости изгиба будет:

$$\lambda = \frac{360}{0,289 \cdot 30} = 41,5 < 70.$$

При этом коэффициент продольного изгиба, определяемый по формуле:

$$\varphi = 1 - 0,8 \left( \frac{\lambda}{100} \right)^2$$

получается равным  $\varphi = 0,86$ .

Для коэффициента  $\xi$ , учитывающего влияние продольной силы на величину изгибающего момента при деформации основного элемента, имеем:

$$\xi = 1 - \frac{N}{\varphi F_{\sigma p} R_c} = 1 - \frac{25750}{0,86 \cdot 600 \cdot 195} = 0,74.$$

Тогда наибольшее напряжение в материале призматической балки составит:

$$\frac{N}{F_0} + \frac{M_{II}}{W_{0\xi}} = \frac{25750}{600} + \frac{2370 \cdot 100}{3000 \cdot 0,74} = 43 + 106 = 149 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} < R_c = 195 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$$

и, следовательно, принятые размеры ее поперечного сечения в полной мере соответствуют заданному уровню интенсивности действующей нагрузки.

Изложенный подход к исследованию действительной работы плоскостной конструкции может быть реализован и для статического расчета перекрестных систем на основе шпренгельных балок. Сложность решения задач применительно к таким пространственным конструкциям регулярной

структуры, разумеется, будет многократно возрастать с увеличением общего числа неизвестных в статически неопределимых системах.

### Литература

1. Wiegmann R. Über die Konstruktion von Kettenbrücken nach dem Dreieckssystem und deren Anwendung auf Dachsysteme. Königliche Kunst-Akademie, Düsseldorf. 1839. s. 27–29.
2. Suhling P. Entwicklung eines neuen Bindersystems in Holz-Stahl-Bauweise. Bauzeitung, 32, 1978. – s. 657 – 659.
3. Suhling P. Zur Vorspannung der Sparren von unterspannten Dreigelenkbindern in Holz-Stahl-Bauweise. Suhling. Bauplanung – Bautechnik, 33, 1979. – s. 10 – 15.
4. Забродин М.П., Егоров В.В. Исследование потери устойчивости плоской формы изгиба шпренгельных балок с перфорированной стенкой и комбинированным напряжением. Известие вузов. Строительство и архитектура, №8, Новосибирск, 1984 г. – С. 15-19.
5. Егоров В.В. Развитие конструктивных форм и методов расчета комбинированных систем шпренгельного типа: Автореф. дис. ... докт. техн. наук. – Санкт-Петербург, 2004. – 49 с.
6. Mönck W. Holzbau. Berlin: Verlag für Bauwesen, 1968. – 384 s.
7. Гётц К.-Г., Хоор Д., Мёллер К., Хаттерер Ю. Атлас деревянных конструкций. – М.: Стройиздат, 1985. – 272 с.
8. Егоров В.В., Вьюненко Л.Ф. Расчет несущей способности несущей способности строительных конструкций шпренгельного типа на основе полувероятностной модели. Известия вузов. Строительство. №4. Новосибирск, 2004. – С. 9–16.

9. Тимошенко С.П. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М.-Л.: Госиздат. 1931. – 224 с.
10. Hempel G. Freigespannte Holzbinder. Karlsruhe: Bruderverlag, 1959. – 408 s.

### References

1. Wiegmann R. Über die Konstruktion von Kettenbrücken nach dem Dreieckssystem und deren Anwendung auf Dachsysteme. Königliche Kunst-Akademie, Düsseldorf. 1839. s. 27 – 29.
2. Suhling P. Entwicklung eines neuen Bindersystems in Holz-Stahl-Bauweise. Bauzeitung, 32, 1978. s. 657 – 659.
3. Suhling P. Zur Vorspannung der Sparren von unterspannten Dreigelenkbindern in Holz-Stahl-Bauweise. Suhling. Bauplanung – Bautechnik, 33, 1979. s. 10 – 15.
4. Zabrodin M.P., Yegorov V.V. Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura, №8, Novosibirsk. 1984. pp. 15-19.
5. Yegorov V.V. Razvitiye konstruktivnykh form i metodov rascheta kombinirovannykh sistem shprengel'nogo tipa. [Development of structural forms and methods for calculating combined trussed systems]: dis. doct. techn. nauk. Sankt-Peterburg, 2004. 49 p.
6. Mönck W. Holzbau. Berlin: Verlag für Bauwesen, 1968. 384 s.
7. Gëtts K.-G., Koor D., Mëller K., Khatteer Yu. Atlas derevyannykh konstruktsiy. [Atlas of wooden structures]. M. Stroyizdat, 1985. 272 p.
8. Egorov V.V., V'yunenko L.F. Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo, №4, Novosibirsk. 2004. pp. 9-16.
9. Timoshenko S.P. Sbornik zadach po soprotivleniyu materialov. [Collection of problems on strength of materials]. M., L. Gosizdat. 1931. 224 p.



10. Hempel G. Freigespannte Holzbinder. Karlsruhe: Bruderverlag, 1959.  
408 s.